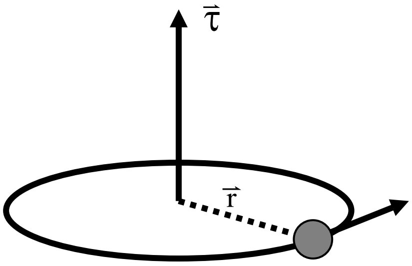
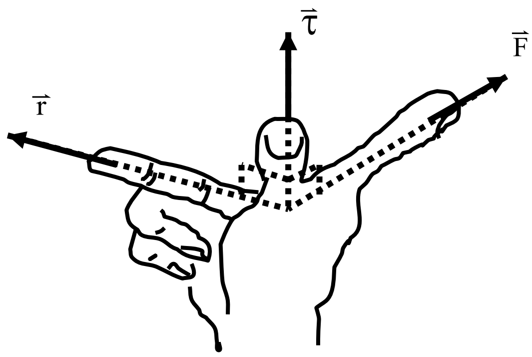
ใบความรู้เรื่อง ทอร์กและโมเมนต์ความเฉื่อย

ทอร์กกับการเคลื่อนที่แบบหมุน

จากความรู้เดิมในเรื่องของโมเมนต์ เมื่อออกแรงกระทำต่อวัตถุและแนวแรงไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลหรือแกนหมุน ผลที่เกิดขึ้น จะมีการหมุนเกิดขึ้น ซึ่งเรียกว่าเกิดโมเมนต์ของแรงรอบจุดหมุนนั้น เรียกว่า **ทอร์ก** โดยทอร์กเป็นปริมาณเวกเตอร์ มีขนาดเท่ากับ แรงคูณระยะทางที่ลากจากจุดหมุนมาตั้งฉากกับแนวแรงและทิศทางของทอร์กมีทิศตั้งฉากกับระนาบการหมุนดังรูป 1.



รูป 1. ก ทอร์กที่กระทำต่อวัตถุ

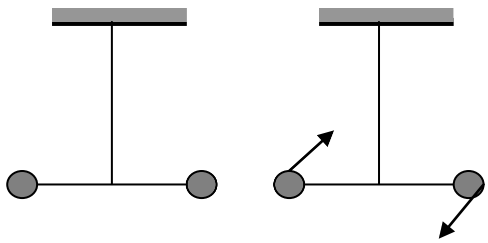


รูป 1. ข แสดงการหาทิศของทอร์ก

จากรูป 1. การหาทิศทางของทอร์ก โดยใช้มือขวาในลักษณะนิ้วชี้ นิ้วกลาง และนิ้วหัวแม่มือ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน แล้ววางนิ้วชี้ไปทางทิศของแรง ($\vec{F}$) นิ้วกลางชี้ตามแนวรัศมี ($\vec{r}$) พุ่งเข้าหาจุดหมุน จะได้ว่า นิ้วหัวแม่มือชี้ทิศทางของทอร์ก ($\vec{\tau}$) ดังรูป 1.ข

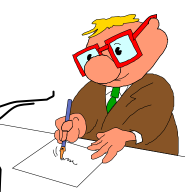
ดังนั้น อาจกล่าวสรุปได้ว่า การเคลื่อนที่แบบหมุน จะเกิดการหมุนในลักษณะที่เกิด **ทอร์ก ($\vec{\tau}$)** เมื่อมีทอร์กที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำ (โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา ไม่เท่ากับ โมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกา ; $\Sigma\vec{M} \neq 0$)

จากรูป2. มีลูกตุ้ม 2 ลูกติดกับคาน แล้วผูกด้วยเชือก แขวนไว้ รูป 2 ก. อยู่นิ่ง จะไม่มีทอร์กเกิดขึ้น เพราะ $\Sigma\vec{M} = 0$ ส่วน รูป 2 ข. เมื่อมีแรงมากระทำให้เกิดการหมุน จะมี ทอร์กเกิดขึ้น ผลจะทำให้เชือกเส้นนี้ขาดได้ นักเรียน สามารถนำการแสดงหาทิศของทอร์ก จากรูป 1. มาอธิบายได้หรือไม่...อธิบาย



จากรูป2. ลูกตุ้มติดกับคาน แขวนไว้ด้วยเชือก

การขันน็อต ให้แน่น และ คายน็อตออกจะ ...เกี่ยวกับ ทอร์ก และทิศทางของทอร์ก อย่างไร...

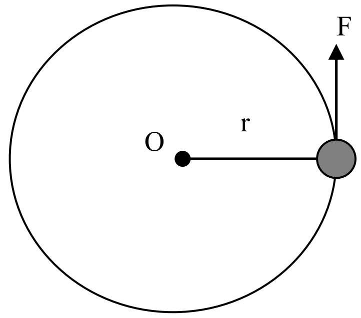


การหาทอร์ก

ในการศึกษาเรื่องการหมุนของวัตถุเมื่อมีทอร์กที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำ ผลที่เกิดขึ้นวัตถุจะหมุนในลักษณะการเปลี่ยนสภาพการหมุนที่มีความเร่งเชิงมุม ตามทิศของทอร์ก ลักษณะเดียวกับการขันน็อตและคาย น็อต

ในที่นี้เราจะเริ่มศึกษาหา ทอร์ก ที่เกิดขึ้นจากการหมุนแบบง่ายๆ เช่น

เมื่อมีมวล m ติดอยู่กับปลายแท่งวัตถุเล็กๆเบาๆ ยาว r โดยปลายอีกข้างหนึ่งตรึงอยู่กับจุด O บนพื้นซึ่งปราศจากแรงเสียดทาน เมื่อมีแรง F มากระทำต่อมวล m ในทิศตั้งฉากกับแท่งวัตถุเล็กๆ ตลอดเวลา โดยแนวแรง F สัมผัสกับแนววงกลมหรือตั้งฉากกับรัศมี r ดังรูป 3.



รูป 3. แสดงแรงกระทำต่อวัตถุทำให้เกิดทอร์ก

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อ 2 ของนิวตัน มวล m จะเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง ซึ่งมีทิศทางเดียวกับแรงคือมีทิศสัมผัสวงกลมตลอดเวลา ได้ว่า

$$F = ma$$

หรือ $$F.r = ma.r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ถ้าภายในช่วงเวลาสั้นๆ Δt ขนาดของความเร็วในแนวสัมผัสเปลี่ยนไป Δv และขนาดของความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนไป $\Delta\omega$ จะได้ว่า

$$\Delta v = r\Delta\omega$$ เมื่อ ($v = \omega r$)

หรือ $$\frac{\Delta v}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ดังนั้น $$\boxed{a = r\alpha}$$

แทนค่า a ใน (1) จะได้ว่า

$$F.r = mr^2.\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

จากนิยามของ ทอร์ก (τ) , $\tau = F.r$

จึงได้ว่า $$\boxed{\tau = mr^2.\alpha}$$

จากสมการ $\tau = mr^2.\alpha$ แสดงว่า ทอร์ก(τ) ทำให้วัตถุหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมค่าหนึ่ง ความเร่งเชิงมุม (α) จะมีค่ามากหรือน้อย นอกจากขึ้นอยู่กับทอร์ก (τ) แล้ว ยังขึ้นอยู่กับค่ามวลของวัตถุ และระยะห่างของมวลจากจุดหมุน (r) ด้วย หรือกล่าวว่าขึ้นอยู่กับ mr^2 ดังสมการ

$$\alpha = \frac{\tau}{mr^2}$$

แสดงว่าเมื่อใช้ทอร์กค่าหนึ่งกระทำต่อวัตถุ ถ้าวัตถุมีค่า mr^2 มากจะหมุน โดยมีความเร่งเชิงมุม (α) น้อย **ค่า mr^2 จึงบอกถึงสมบัติต้านการเปลี่ยนแปลงสภาพการหมุนหรือความเฉื่อยของการหมุนของวัตถุ ซึ่งเรียกว่า โมเมนต์ความเฉื่อย (I ; Moment of inertia)** จึงได้ว่า

$$\boxed{\mathbf{I = mr^2}}$$

โมเมนต์ความเฉื่อย เป็นปริมาณสเกลาร์ มีหน่วยเป็น กิโลกรัมเมตรยกกำลังสอง ($kg.m^2$)

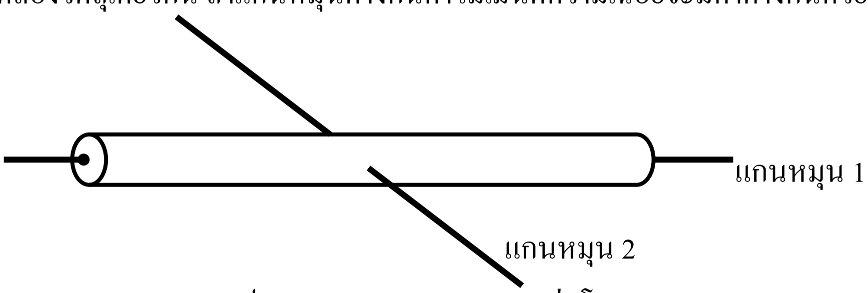
ดังนั้นค่าของทอร์ก (τ) อาจเขียนใหม่ได้ว่า

$$\boxed{\tau = \mathbf{I}\alpha}$$

จากสมการที่ได้พบว่า ทอร์ก (τ) และ ความเร่งเชิงมุม (α) มีทิศทางเดียวกัน

จากการศึกษาในขั้นสูงขึ้นต่อไปพบว่า **ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยขึ้นอยู่กับมวลและการกระจายของมวล และที่สำคัญอย่างยิ่งคือแกนหมุน** ดังนั้น **การบอกค่าโมเมนต์ความเฉื่อยต้องบอกด้วยว่าหมุนรอบแกนใด**

จากการทดลองวัตถุเดียวกัน ถ้าแกนหมุนต่างกันค่าโมเมนต์ความเฉื่อยจะมีค่าต่างกันด้วย ดังรูป 4.



รูป 4. การหมุนรอบแกนของท่อโลหะ

พิจารณาการเปลี่ยนสภาพการเลื่อนตำแหน่ง และ การเปลี่ยนสภาพการหมุน

การเปลี่ยนสภาพการเลื่อนตำแหน่ง

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อ 2 ของนิวตัน $F = ma$

จะได้ $a = \frac{F}{m}$

1. $a \propto F$

หมายความว่า การเปลี่ยนสภาพการเลื่อนตำแหน่ง จะขึ้นอยู่กับ แรง แบบแปรผันตรง คือ เมื่อมวลของวัตถุคงตัว ถ้าแรงที่มากระทำต่อวัตถุมีค่ามาก ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสภาพการเลื่อนตำแหน่งได้มาก และ ถ้าแรงที่มากระทำต่อวัตถุมีค่าน้อย ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสภาพการเลื่อนตำแหน่งได้น้อย

2. $a \propto \frac{1}{m}$

หมายความว่า การเปลี่ยนสภาพการเลื่อนตำแหน่ง จะขึ้นอยู่กับ มวล แบบแปรผกผัน คือ เมื่อมีแรงคงตัวกระทำต่อวัตถุ ถ้าวัตถุมีมวลมาก ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสภาพการเลื่อนตำแหน่งได้น้อย และ ถ้าวัตถุมีมวลน้อย ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสภาพการเลื่อนตำแหน่งได้มาก

การเปลี่ยนสภาพการหมุน

จากสภาพการหมุนของวัตถุใดๆ $\tau = I\alpha$

จะได้ $\alpha = \frac{\tau}{I}$

1. α แปรผันกับ τ

หมายความว่า การเปลี่ยนสภาพการหมุน (ความเร่งเชิงมุม) จะขึ้นอยู่กับ ทอร์ก (τ) แบบแปรผันตรง คือ เมื่อโมเมนต์ความเฉื่อย (I) ของวัตถุคงตัว ถ้าทอร์ก (τ) ที่มากระทำต่อวัตถุมีค่ามาก ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนสภาพการหมุน (ความเร่งเชิงมุม) ได้มาก ถ้าทอร์ก (τ) ที่มากระทำต่อวัตถุมีค่าน้อย ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนสภาพการหมุน (ความเร่งเชิงมุม) ได้น้อย

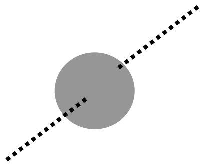
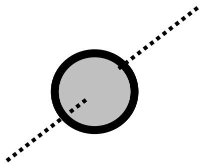
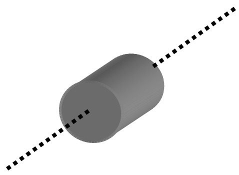
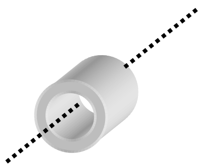
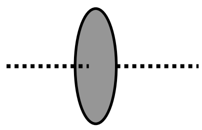
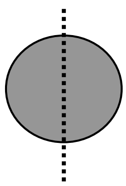
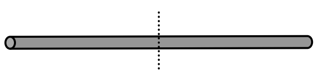
2. α แปรผันกับ $\frac{1}{I}$

หมายความว่า การเปลี่ยนสภาพการหมุน (ความเร่งเชิงมุม) จะขึ้นอยู่กับ โมเมนต์ความเฉื่อย (I) ของวัตถุ แบบแปรผกผัน คือ เมื่อทอร์ก (τ) ของวัตถุคงตัว ถ้าโมเมนต์ความเฉื่อย (I) ของวัตถุ มีค่ามาก ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนสภาพการหมุน (ความเร่งเชิงมุม) ได้น้อย ถ้าโมเมนต์ความเฉื่อย (I) ของวัตถุ มีค่าน้อย ผล จะทำให้เกิดการเปลี่ยนสภาพการหมุน (ความเร่งเชิงมุม) ได้มาก

นักเรียน คิดว่า สมการ การเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง และ สมการการเคลื่อนที่แบบหมุน มีส่วนคล้ายกัน อย่างไรบ้าง...

โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia)

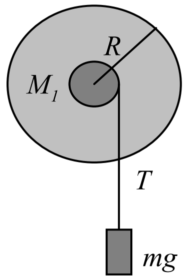
โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปต่างๆ รอบแกนสมมาตร

รูปร่างวัตถุ	แกนหมุน	รูป	โมเมนต์ความเฉื่อย I
ทรงกลมตัน มวล m รัศมี R	รอบแกน ผ่านจุดศูนย์กลาง		$I = \frac{2}{5} mR^2$
ทรงกลมกลวง มวล m รัศมี R	รอบแกน ผ่านจุดศูนย์กลาง		$I = \frac{2}{3} mR^2$
ทรงกระบอกตัน มวล m รัศมี R ยาว L	รอบแกน ของทรงกระบอก		$I = \frac{1}{2} mR^2$
ทรงกระบอกกลวง มวล m รัศมี R ยาว L	รอบแกน ของทรงกระบอก		$I = mR^2$
แผ่นกลมบาง มวล m รัศมี R	รอบแกน ผ่านศูนย์กลาง ตั้งฉากกับแผ่น		$I = \frac{1}{2} mR^2$
แผ่นกลมบาง มวล m รัศมี R	รอบแกน ผ่านศูนย์กลาง บนระนาบของแผ่น		$I = \frac{1}{4} mR^2$
แท่งวัตถุเล็ก มวล m ยาว L	รอบแกน ผ่านศูนย์กลางมวล ตั้งฉากกับแผ่น		$I = \frac{1}{12} mL^2$

การหมุนของวัตถุทั้งหมดในตารางข้างบนเป็นการหมุนรอบแกนผ่านจุดศูนย์กลางมวล และเป็นแกนสมมาตรของวัตถุ มีหลักที่สามารถพิสูจน์ได้อยู่ว่า ถ้าเลื่อนแกนหมุนไปเป็นระยะ L ให้ขนานแกนสมมาตรเดิม โมเมนต์ความเฉื่อยจะเพิ่มขึ้นเท่ากับ mL^2 (ต้องนำค่า mL^2 มาบวกค่าในตาราง)

ตัวอย่างที่ 1 ระบบล้อกับเพลาประกอบด้วยล้อมวล M_1 รัศมี R ยึดติดกับเพลามวล M_2 รัศมี r ถ้าถ่วงน้ำหนักของมวล m ที่เชือกพันรอบเพลา ดังแผนภาพ ความเร่งเชิงมุมของล้อและเพลาจะเป็นเท่าใด

วิธีทำ โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อและเพลารอบแกนหมุนคือ



$$I = \frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{2}M_2r^2$$

ให้ T เป็นความตึงของเส้นเชือก

เราจะมีสมการการเคลื่อนที่สองสมการคือ

สมการการเคลื่อนที่เชิงเส้นของมวล m ; $\Sigma F = ma$

$$mg - T = ma \quad ....(1)$$

และสมการการเคลื่อนที่แบบหมุนของล้อและเพลา ; $\tau = Tr$, $\tau = I\alpha$

จะได้ $$Tr = I\alpha \quad ....(2)$$

จากสมการ (1) จะได้ $T = mg - ma$ และนำไปแทนค่า T ในสมการ (2)

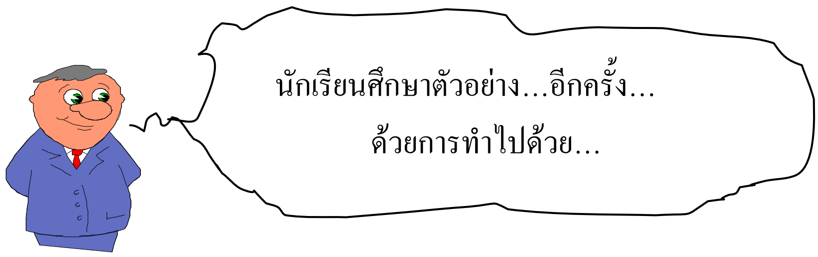
แล้วอาศัยความสัมพันธ์ $a = \alpha r$ จะหาค่า α ได้คือ

$$(mg - ma)r = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{mgr}{I + mr^2}$$

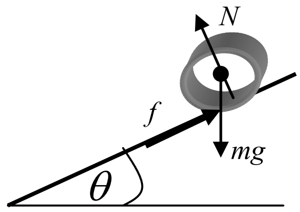
ซึ่งสามารถหาค่าได้จาก $I = \frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{2}M_2r^2$

คำตอบ ความเร่งเชิงมุมของล้อและเพลาจะมีค่าเท่ากับ $\alpha = \frac{mgr}{I + mr^2}$ โดยที่ $I = \frac{1}{2}M_1R^2 + \frac{1}{2}M_2r^2$



ตัวอย่างที่ 2 ทรงกระบอกกลวงบาง มวล m รัศมี R กลิ้งลงตามพื้นเอียงทำมุม θ กับระนาบระดับ โดยไม่มีการไถล จุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกจะมีความเร่งเท่าใด

วิธีทำ เนื่องจากมวลจากทุกส่วนของทรงกระบอกกลวงบางจะอยู่ห่างจากแกนหมุนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลเท่ากันทั้งหมดและเท่ากับค่ารัศมี R



ดังนั้นค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกกลวงรอบแกนหมุนดังกล่าว คือ $I = mR^2$

แรงที่กระทำต่อทรงกระบอกกลวงมีดังแสดงในรูป

น้ำหนักของทรงกระบอกซึ่งกระทำที่จุดศูนย์กลางมวลสามารถคิดแยกเป็นสององค์ประกอบในแนวที่ขนานกับพื้นเอียง (ลง = $mg\sin\theta$) และในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง ($mg\cos\theta$) จึงสามารถเขียนสมการได้สองสมการ คือ

การเคลื่อนที่เชิงเส้นของ C.M. ตามสมการ $mg\sin\theta - f = ma$ ....(1)

การหมุนรอบแกนผ่าน C.M. ตามสมการ $\tau = fr$, $\tau = I\alpha$ ....(2)

นำค่า f จากสมการ (2) ไปแทนใน (1) และอาศัยความสัมพันธ์ $a = \alpha r$ สำหรับการกลิ้งโดยไม่ไถล จะหาค่า α ได้คือ

$$mg\sin\theta - \frac{Ia}{R^2} = ma$$ แล้วแทนค่า I

จะได้ $$a = \frac{1}{2}g\sin\theta$$

คำตอบ จุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกจะมีความเร่งลงตามพื้นเอียงเท่ากับ $\frac{1}{2}g\sin\theta$